Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Kategorien und Bikategorien II

1. Nachdem wir in Toth (2009), d.h. im ersten Teil unserer Untersuchung zu semiotischen Kategorien und Bikategorien, unterschieden haben zwischen Stabilität und Prozess bei semiotischen Kategorien, genauer zwischen dem Doppelcharakter der Subzeichen der semiotischen Matrix als statische Objekte einerseits und als dynamische Morpismen anderseits, wollen wir hier den kategorietheoretischen Aufbau der Zeichenklassen und Realitätsthematik mit Hilfe von 2-Morphismen und 2-Portemanteau-Morphismen darstellen.

2. Statt, wie in der semiotischen Kategorietheorie üblich (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.), die Subzeichen als Objekte semiotischer Kategorien zu nehmen, gehen wir wiederum von den sie konstituierenden Primzeichen aus und definieren die zwei fundamentalen Morphismen:

$(.1.) \rightarrow (.2.) \equiv \alpha$
$(.2.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta$,

Wir haben dann die Konversen

$(.2.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°$
$(.3.) \rightarrow (.2.) \equiv \beta°$,

die Komponierte

$(.1.) \rightarrow (.3.) \equiv \beta\alpha$

und die Konverse der Komponierten

$(.3.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°\beta°$

3. Damit muss die Abbildung von Subzeichen also nicht mehr wie bisher durch 1-Morphismen, sondern durch 2-Morphismen (bzw. Bi-Morphismen (vgl. Bénabou 1967), in der Semiotik besteht kein Unterschied) geschehen. Bevor wir allerdings semiotische 2-Kategorien definieren können, müssen die obigen

2-Portemanteau-Morphimena aufgelöst werden, denn jede abstrakte 2-Kategorie der Form
(.A.) $\to$ (.B.) hat vier Möglichkeiten „Auflösungen“, d.h. 1-Morphismen:

1. (.A $\to$ .B)
2. (.A $\to$ B.)
3. (A. $\to$ .B)
4. (A. $\to$ B.)

Wir wollen zu ihrer Unterscheidung wieder die dezimalen Indizes 00, 01, 10 und 11 benutzen, je nachdem, ob triadische Primzeichen auf triadische Primzeichen, trichotomische auf trichotomische oder „gemischt“ abgebildet werden. Wenn wir als arbiträres Symbol für einen abstrakten 1-Morphismus ζ wählen, definieren wir also

1. (.A $\to$ .B) $\equiv \zeta_{00}$
2. (.A $\to$ B.) $\equiv \zeta_{01}$
3. (A. $\to$ .B) $\equiv \zeta_{10}$
4. (A. $\to$ B.) $\equiv \zeta_{11}$

Demnach erhalten wir also für die obigen 1-Portemanteau-Morphismen

$[(.1.) \to (.2.) \equiv \alpha] = \{\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$
$[.2.) \to (.3.) \equiv \beta] = \{\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_{10}, \beta_{11}\}$,

ihre Konversen

$[(.2.) \to (.1.) \equiv \alpha°] = \{\alpha_{00}°, \alpha_{01}°, \alpha_{10}°, \alpha_{11}°\}$
$[(.3.) \to (.2.) \equiv \beta°] = \{\beta_{00}°, \beta_{01}°, \beta_{10}°, \beta_{11}°\}$

die Komponierte

$$\begin{aligned}[(.1.) \to (.3.) \equiv \beta\alpha] = \{&\beta_{00}°\alpha_{00}°, \beta_{00}°\alpha_{01}°, \beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{00}°\alpha_{11}°,\\ &\beta_{01}°\alpha_{00}°, \beta_{01}°\alpha_{01}°, \beta_{01}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{11}°,\\ &\beta_{10}°\alpha_{00}°, \beta_{10}°\alpha_{01}°, \beta_{10}°\alpha_{10}°, \beta_{10}°\alpha_{11}°,.\\ &\beta_{11}°\alpha_{00}°, \beta_{11}°\alpha_{01}°, \beta_{11}°\alpha_{10}°, \beta_{11}°\alpha_{11}°\}\end{aligned}$$

und die Konverse der Komponierten

$$
\begin{aligned}
[(.3.) \rightarrow (.1.) \equiv \alpha°\beta°] = \{&\beta_{00}°\alpha_{00}°, \beta_{01}°\alpha_{00}°, \beta_{10}°\alpha_{00}°, \beta_{11}°\alpha_{00}°,\\
&\beta_{00}°\alpha_{01}°, \beta_{01}°\alpha_{01}°, \beta_{10}°\alpha_{01}°, \beta_{11}°\alpha_{01}°,\\
&\beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{10}°, \beta_{10}°\alpha_{10}°, \beta_{11}°\alpha_{10}°,.\\
&\beta_{00}°\alpha_{10}°, \beta_{01}°\alpha_{11}°, \beta_{10}°\alpha_{11}°, \beta_{11}°\alpha_{11}°\}
\end{aligned}
$$

4. Damit sind alle Subzeichen mit den Primzeichen als Objekten und den Abbildungen zwischen ihnen als 1-Morphismen definiert, d.h. alle 2-Morphismen der bisher üblichen Abbildungen zwischen Subzeichen, verstanden als Semiosen, ebenso wie die Portemanteaus sind aufgelöst. Wir können also daran gehen, die Zeichenklassen kategorietheoretisch neu zu definieren, die bisher z.B. wie folgt pseudo-kategorietheoretisch notiert wurden:

$(3.1\ 2.2\ 1.3) \equiv (\alpha°\beta°, \mathrm{id2}, \beta\alpha)$,

wobei eben jedes Subzeichen als Objekt genommen und ihm ein Morphismus zugewiesen wurde. (Auf das Problem der „dynamischen Morphismen" können wir hier nicht eingehen; vgl. vorläufig Toth 2008, S. 159 ff.).

Aus unseren bisherigen Ergebnissen folgt, dass, da jede Zeichenklasse aus 3 Subzeichen besteht, von denen jedes ein Portemanteau von 4 1-Morphismen ist, jede Zeichenklasse 4 x 4 x 4 = 64 kategorietheoretische Notationen besitzt, allerdings nur, sofern diese Zeichenklasse weder das Rhema (3.1), noch das Legizeichen (1.3) besitzt, d.h. keine komponierten Morphismen enthält, denn diese sind, wie oben gezeigt, Portemanteaus von je 16 1-Morphismen, so dass also eine Zeichenklasse, die entweder (3.1) oder (1.3) enthält, 16 x 4 x 4 bzw. 4 x 4 x 16 = 256 kategorietheoretische Notationen hat, und falls sie sowohl (3.1) als auch (1.3) enthält, hat sie 16 x 4 x 16 = 1'024 kategorietheoretische Schemata. Man kann sich leicht ausrechnen, wie viele tausend von kategorie-theretischen Zeichenklassen es gibt. Wir wollen hier nun gar nicht auf „höhere" Formen der Abbildungen Objekte Bezug nehmen, d.h. auf Funktoren, natürliche Transformation verschiedener Stufe, denn man kann sofort sehen, dass sich aus dem simplen Wechsel von den Subzeichen zu den Primzeichen als Objekten eine geradezu astronomische Erhöhung des kategorietheoretischen Instruments der Peirceschen Semiotik ergibt.

Bibliographie

Bénabou, Jean, Introduction to bicategories, part I. In: Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Mathematics 47, 1967, S. 1-77

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997
Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008
Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien (I). In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)

22.8.2009